Chapitre 38

Familles sommables

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
I désigne un ensemble non vide.

1 Préliminaires

1.1 Introduction

Au chapitre précédent, on a étudié des séries, qui sont des objets de la forme

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

On a notamment pu donner un sens à une somme infinie de termes non nuls, par exemple

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{n\times(n+1)} \right) = 1$$

On a ainsi décrit une somme (infinie) de tous les termes de la famille $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Les familles sommables permettent de généraliser cela à des familles indexées non pas par (une partie de) $\mathbb{N}$, mais des ensembles plus généraux. On s'intéressera donc à des objets de la forme (lorsqu'ils ont un sens)

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \qquad \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} b_{m,n} \qquad \sum_{q\in\mathbb{Q}} c_q \qquad \text{et plus généralement } \sum_{i\in I} \alpha_i$$

avec $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $(b_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$, $(c_q)_{q\in\mathbb{Q}}$ et $(\alpha_i)_{i\in I}$ des familles de réels.

1.2 Conventions

On sera notamment amené à manipuler des quantités infinies dans les calculs. On rappelle / définit donc quelques règles de calculs sur la demi-droite réelle achevée $[0,+\infty]$:

$$\forall x \in [0,+\infty] \qquad x \leq +\infty$$

$$\begin{array}{rl} \forall x \in [0,+\infty] & x + (+\infty) = +\infty \\ \forall x \in]0,+\infty] & x \times (+\infty) = +\infty \\ & 0 \times (+\infty) = 0 \end{array}$$

Cette dernière règle ne correspond pas à l'usage, notamment pour les calculs de limites. Elle permet cependant de rendre valide certains types de calculs, cf exemple 2
Enfin, on généralise la notion de borne supérieure à une partie non vide $A \subset \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$:

$$\overline{\sup}(A) = \begin{cases} +\infty & \text{si } +\infty \in A \\ +\infty & \text{si } A \subset \mathbb{R}_+ \text{ est non majorée} \\ \sup(A) & \text{si } A \subset \mathbb{R}_+ \text{ est majorée} \end{cases}$$

La notation $\overline{\sup}$ n'est pas officielle.

2 Familles sommables

2.1 Familles sommables de réels positifs

Voici la définition "officielle" :

Définition 38.1

On suppose que $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de réels positifs. On appelle <u>somme (de la famille)</u> $(a_i)_{i\in I}$ la quantité

$$\sum_{i\in I} a_i := \overline{\sup}\left\{ \sum_{i\in K} a_i \,\middle|\, K \subset I, \quad K \text{ fini} \right\} \quad \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \tag{$*$}$$

- Si $\sum_{i\in I} a_i < +\infty$, on dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est <u>sommable</u>.
- Si $\sum_{i\in I} a_i = +\infty$, on dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ n'est <u>pas sommable</u>.

Remarque. Contrairement aux séries, $\sum_{i\in I} a_i$ représente ici non pas une suite mais ou bien un réel ou bien $+\infty$. Il y a cependant une ambiguité de notation si $I = \mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$...), mais en pratique, la notion de famille sommable n'est pas utile si $I = \mathbb{N}$: cela revient à étudier la série $\sum a_i$ directement, cf exemple 1 ci-dessous.

Propriété 38.2

Une famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement s'il existe un réel M (fini) tel que :

$$\text{pour toute partie } K \textbf{ finie} \text{ de } I, \text{ on a} \qquad \sum_{i\in K} a_i \leq M$$

Bien entendu, ce réel M ne doit donc pas dépendre de K. Si un tel réel M existe, alors le plus petit de ces réels est égal à la somme $\sum_{i\in I} a_i$.

Démonstration. Si un tel réel M existe, alors il est clair que l'ensemble de $(*)$ est majoré par M, donc la borne supérieure est finie. Réciproquement, si la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $M = \sum_{i\in I} a_i$ convient. □

La définition ou la caractérisation semble pour le moins cryptique, mais sur le principe cela revient plus ou moins à écrire

$$\sum_{i\in I} a_i := \quad \text{''} \lim_{K\to I, K \text{ fini}} \text{''} \quad \sum_{i\in K} a_i$$

la limite pouvant être infinie. Et en réalité, ce n'est ni plus ni moins qu'une généralisation de la situation des séries à termes positifs.

Exemple 1 (Cas $I = \mathbb{N}$)**.** On suppose que $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille de réels **positifs**. On affirme que la famille $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum a_i$ converge. De plus, on a alors

$$\underbrace{\sum_{i\in I} a_i}_{\text{somme de la famille sommable}} = \underbrace{\sum_{i=0}^{+\infty} a_i}_{\text{somme de la série}}$$

On ne montrera que l'équivalence et non l'égalité ci-dessus.

- Si la famille est sommable, alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a (avec $K = [\![0, N]\!]$ une partie finie de $I = \mathbb{N}$) :

  $$\sum_{i\in K} a_i = \sum_{i=0}^{N} a_i \leq M$$

  On a donc majoré la somme partielle d'une série à termes positifs : la série $\sum a_i$ converge.
- Réciproquement, on suppose que la série converge. On va vérifier la caractérisation ci-desssus avec $M = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i$. Soit K une partie finie de $\mathbb{N}$. Alors il existe N' tel que $K \subset [\![0, N']\!]$ (il suffit de prendre $N' = \max K$). Comme la série est à termes positifs, on en déduit que

  $$\sum_{i\in K} a_i \leq \sum_{i=0}^{N'} a_i \leq \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \leq M$$

  donc la famille est sommable.

Il n'y a donc vraiment (quasiment) aucune différence avec les séries lorsque $I = \mathbb{N}$. La seule différence est que, comparé aux séries, on donne donc un sens plus large à l'écriture $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. À condition que chaque terme a_n soit **positif**, il est toujours possible d'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, cette quantité étant finie ssi la série converge, et sinon elle vaut $+\infty$.

Exemple 2. On a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$.

En particulier, par la convention $0 \times (+\infty) = 0$, on peut écrire ce type de calcul :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (0 \times 1) = 0 \times \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = 0 \times (+\infty)$$

2.2 Famille sommable de nombres réels ou complexes

Définition 38.3

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes. On dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si la famille $(|a_i|)_{i\in I}$ est sommable.

Exemple 3. Si $I=\mathbb{N}$ et que $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille quelconque d'éléments de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$, alors la famille $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si $\sum a_i$ est ACV.

Le parallèle avec les séries devient plus ambigu : on devrait en fait parler "d'absolue sommabilité", tout comme on parle d'absolue convergence pour les séries.

Propriété 38.4

- Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de réels, alors (a_i) est sommable ssi (a_i^+) et (a_i^-) sont sommables et si c'est le cas, on définit la somme de la famille $(a_i)_{i\in I}$ comme le réel
$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^-$$
- Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de complexes, alors (a_i) est sommable ssi $(\operatorname{Re} a_i)$ et $(\operatorname{Im} a_i)$ sont sommables et si c'est le cas, on définit la somme de la famille $(a_i)_{i\in I}$ comme le complexe
$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} \operatorname{Re} a_i + \sum_{i\in I} \operatorname{Im} a_i$$

2.3 Propriétés de base

Propriété 38.5 (Linéarité)

Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ des familles sommables et $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$. Alors la famille $(\lambda a_i+\mu b_i)_{i\in I}$ est sommable et
$$\sum_{i\in I}(\lambda a_i+\mu b_i) = \lambda\sum_{i\in I} a_i + \mu\sum_{i\in I} b_i$$

Propriété 38.6 (Comparaison)

Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de complexes. On suppose que
$$\forall i\in I \qquad |a_i|\leq |b_i|$$

- Si $(b_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable.
- Si $(a_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, alors $(b_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.

3 Théorèmes fondamentaux des familles sommables

3.1 Théorèmes de sommes à double indice

La plupart des familles sommables (ou non) qu'on étudie sont indexées par $\mathbb{N}^2$: elles sont ainsi de la forme $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$.

Propriété 38.7 (Théorème de Fubini)

Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de complexes. On suppose qu'on est dans l'un des deux cas suivants :

- Pour tous i, j, les nombres $a_{i,j}$ sont réels et positifs.
- Ou la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable.

Alors on peut intervertir l'ordre de sommation :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right)$$

En particulier, si $I = J = \mathbb{N}$, on peut réécrire la conclusion ainsi :

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$$

L'hypothèse de positivité ou de sommabilité est essentielle pour intervertir.

Exemple 4. Calculer $S = \sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ (ou encore $S = \sum_{p=2}^{+\infty}(\zeta(p)-1)$...).

Il arrive parfois que la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in I\times J}$ puisse se réécrire de manière à découpler les indices m et n :

$$a_{m,n} = b_m c_n$$

Dans ce cas, on peut se ramener à étudier les familles (b_m) et (c_n)

Propriété 38.8 (Sommabilité de $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$)

Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles de nombres complexes. On suppose qu'on est dans l'un des deux cas suivants :

- Pour tous i, j, les nombres a_i et b_j sont réels et positifs.
- Ou les familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont sommables.

Alors la famille $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right) \qquad \text{avec la convention } 0\times(+\infty) = 0$$

Exemple 5. Calculer $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin(m-n)}{m^2n^2}\right)$ après avoir justifié son existence.

3.2 Théorèmes de réordonnement

Propriété 38.9 (Sommation par paquets)

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de complexes. Soit $(A_k)_{k\in K}$ une partition de l'ensemble I. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable.
2. Pour tout $k \in K$,
   (a) la famille $(a_i)_{i\in A_k}$ est sommable ; on note $\rho_k = \sum\limits_{i\in A_k} a_i$ la somme associée et...
   (b) la famille $(\rho_k)_{k\in K}$ est sommable.

Et dans ce cas, on a la formule :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K} \rho_k = \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in A_k} a_i\right)$$

Par ailleurs, si la famille $(a_i)_{i\in I}$ est à réels positifs, l'égalité ci-dessus est vérifiée (éventuellement elle se réduit à $+\infty = +\infty$).

Exemple 6. Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{(m+n)^2}\right)_{m,n\in(\mathbb{N}^*)^2}$ n'est pas sommable.

Propriété 38.10 (Somme commutativement convergente)

Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille sommable. Alors la famille $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Par ailleurs, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille à réels positifs, alors l'égalité ci-dessus est valide (et éventuellement se réduit à $+\infty = +\infty$)

Démonstration. Il suffit d'utiliser le théorème précédent et de sommer des paquets de 1 en posant, pour tout $k \in K := \mathbb{N}$, $A_k := \{\sigma(k)\}$. □

Exemple 7. Pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)^2}$ converge.

3.3 Produit de Cauchy

Définition 38.11

Soit $\sum_{k\geq 0} a_k$ et $\sum_{k\geq 0} b_k$ deux séries à termes quelconques. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

La série $\sum_{n\geq 0} c_n$ est appelée produit de Cauchy des séries $\sum_{k\geq 0} a_k$ et $\sum_{k\geq 0} b_k$.

Propriété 38.12

Soit $\sum_{k\geq 0} a_k$ et $\sum_{k\geq 0} b_k$ deux séries ACV. Alors leur produit de Cauchy $\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ est une série ACV et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k\right)$$

Exemple 8. Soit $\sum u_n$ une série ACV. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} 2^k u_k\right)$ converge et calculer sa somme en fonction de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.